# שיטות מחקר במימון

## פרק 4 - אמידה נקודתית

### תוכן העניינים


1. אומד חסר הטייה ........ 1
2. שיטת המומנטים ........ 7
3. אומד עקיב ........ 10
4. אומד ניראות מקסימלית ........ 12

# אומד חסר הטייה:

## רקע:

$\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-$\theta$, אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-$\theta$ : $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

המשתנה $X$ הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה :

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **הסתברות** | $2\theta$ | $1-6\theta$ | $4\theta$ |

מעוניינים לאמוד את $\theta$ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות : $X_1$ ו- $X_2$.

א. הראו שהאומד : $T_1=\frac{2X_1+X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל-$\theta$.

הטיה של אומד היא : $E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$. כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד $T_1$ ?

ג. תקנו את $T_1$, כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא : $T_3=1.5X_1-X_2-1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל-$\theta$, אז $g\left(\hat{\theta}\right)$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g\left(\theta\right)$, רק אם $g$ תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P\left(X=3\right)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה $\sigma^2$ : $S^2=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של $X$.

**תזכורות חשובות:**

אם: $Y=aX+b$, אזי: $E(Y)=aE(X)+b$ , $V(Y)=a^2\cdot V(X)$ , $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

אם: $X_1,X_2,.......,X_n$ משתנים מקריים, אזי:

$E(T)=E(X_1+X_2+......+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+......+E(X_n)$.

אם: $X_1,X_2,.......,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$V(T)=V(X_1+X_2+......+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+......+V(X_n)$.

## שאלות:

**1)** הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת $\mu$ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת $\mu$, נלקח מדגם של 5 ציונים: $X_1,\ldots,X_5$.
שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

חוקר א' הציע: $T_1=\dfrac{X_1+\ldots+X_5}{5}$.

חוקר ב' הציע: $T_2=\dfrac{2X_1-X_3+X_4}{2}$.

חוקר ג' הציע: $T_3=\dfrac{2X_1+X_3}{2}$.

א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?
ב. הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.
ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100.
חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.
ד. איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

**2)** כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים.
נסמן את שונות הגובה ב- $\sigma^2$. הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה: $T_2=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$ , $T_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.
ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

**3)** $X\sim B(n,p)$. כלומר, $X$ הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר $P$ (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל $n$.

א. פתחו אומד חסר הטיה ל- $P$.
ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?
ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?
ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$.

**4)** בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע: $\theta$, $0 \le \theta \le 2$.
פונקציית ההסתברות של $X$ - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:
$$P(X=0)=1-\frac{\theta}{2}\ ,\ P(X=1)=\frac{\theta}{3}\ ,\ P(X=2)=\frac{\theta}{6}.$$
א. מְצאו אומד בלתי מוטה ל-$\theta$, שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.
ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל-$\theta$, שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום, במשך שלושה ימים - $X_1, X_2, X_3$ (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

**5)** בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר $\theta$ באופן הבא:
הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא $3\theta$,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1-4\theta$,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא $\theta$.
במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.
א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר $\theta$ על סמך תצפית בודדת.
ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר $\theta$ על סמך 4 תצפיות.
ג. מהו האומדן לפרמטר $\theta$ על סמך תוצאות המדגם.
ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.
ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

**6)** קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:
א. אם $T$ הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר $\theta$, אז $5T$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר $5\theta$.
ב. אם $T$ הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר $\theta$, אז $T^2$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר $\theta^2$.

**7)** במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא $p$ , ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$.
דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה.
נסמן ב- $X$ את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה,
וב- $Y$ את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה.
איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- $p$ ?

א. $\frac{X}{20}$.

ב. $\frac{Y}{20}$.

ג. $\frac{X+Y}{60}$.

ד. $\frac{2X+Y}{80}$.

**8)** יהיו $T_1$ ו- $T_2$ אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר $\theta$.

א. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta^2$, המתבסס על $T_1$ ו- $T_2$.

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$, המתבסס על $T_1$ ו- $T_2$.

**9)** נתון ש- $X$ הינו משתנה מקרי עם תוחלת $\mu$ ושונות $\sigma^2$.
נדגמו $n$ תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ אומד חסר הטייה ל- $\mu$, כאשר: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות: $X_1 \cdot X_2$.
הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- $\mu^2$.

## תשובות סופיות:

1) א. $T_1$ ו- $T_2$. ב. $\frac{2}{3}T_3$. ג. $T_1 = 76.6$ , $T_2 = 110$ ד. $T_1$.

2) א. ראו בווידאו. ב. $T_2$.

3) א. $\frac{x}{n}$. ב. $1-\frac{x}{n}$ ג. $X$. ד. $\theta$.

4) א. $\frac{3x}{2}$. ב. $\frac{3\overline{x}}{2}$.

5) א. $1-\frac{x}{2}$. ב. $1-\frac{1}{2}\overline{x}$. ג. 0.125. ד. $3\left(1-\frac{1}{2}\overline{x}\right)$.
ה. לשונות 0.917.

6) א. נכון. ב. לא נכון.

7) ב'.

8) א. $T_1 \cdot T_2$. ב. $T_1 - T_1 \cdot T_2$.

9) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

# שיטת המומנטים:

## רקע:

מומנט מסדר ראשון של משתנה $X$ מוגדר להיות: $E(X)$.

מומנט מסדר שני של משתנה $X$ מוגדר להיות: $E\left(X^2\right)$.

באופן כלל, מומנט מסדר $r$ מוגדר להיות: $E\left(X^r\right)$.

מומנט מסדר ראשון של $n$ תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i}{n}$ - זהו מומנט מסדר ראשון של המדגם.

מומנט מסדר שני של $n$ תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i^2}{n}$ - זהו המומנט מסדר שני של המדגם.

באופן כללי, מומנט מסדר $r$ של $n$ תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i^r}{n}$ - זהו מומנט ה-$r$ של המדגם.

השיטה: משווים את המומנט המתאים של ההתפלגות לפי המומנט המתאים של המדגם.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נגיד שמספר הפעמים שאדם מתעטש ביום מתפלג פואסונית על ידי פרמטר $\lambda$ (קצב ההתעטשויות ביום). רוצים לאמוד את $\lambda$ בשיטת המומנטים.

## שאלות:

**1)** $X$ מתפלג אחיד רציף מהערך המינימלי $a$ לערך המכסימלי 20. מצא אומד לערך מינימלי $a$ לפי שיטת המומנטים על סמך $n$ תצפיות מההתפלגות.

**2)** דוגמים $n$ תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות נורמאלית אשר תוחלתה היא $\mu$ והשונות שלה היא $\sigma^2$. מצא אומדים לפרמטרים אלה לפי שיטת המומנטים.

**3)** אדם מטיל מטבע רגיל $n$ פעמים. יש לאמוד את מספר הפעמים שהוא מטיל את המטבע וזאת על סמך $X$ – מספר העצים שהוא קיבל.
א. מצא אומד בשיטת המומנטים ל-$n$ על סמך $X$ בודד.
ב. מצא אומד בשיטת המומנטים ל-$n$ על סמך חזרה של $m$ פעמים על אותו תהליך בו מטילים את המטבע ההוגן n פעמים.
ג. מהו האומדן אם האדם חזר על התהליך שלוש פעמים:
פעם אחת קיבל 5 עצים, בפעם השנייה הוא קיבל 4 עצים ובפעם השלישית הוא קיבל 7 עצים.

**4)** נתון ש- $X_i \sim \exp(\lambda)$. מצא אומד בשיטת המומנטים לפרמטר $\lambda$ על סמך מדגם של $n$ תצפיות.

**5)** נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x)=\begin{cases}\theta\cdot X^{\theta-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.
א. בטא את $E(X)$ כפונקציה של הפרמטר $\theta$.
ב. מצא אומד ל-$\theta$ על פי שיטת המומנטים.

**6)** הזמן בדקות להכנת לחם במאפייה מתפלג באופן הבא: $X_i \sim N(10,\sigma^2)$.
במדגם של הכנת ארבעה לחמים התקבלו התוצאות הבאות: 5, 10, 6, 4.
א. אמוד את $\sigma^2$ בשיטת המומנטים על סמך מדגם בגודל $n$.
ב. מצא את האומדן ל- $\sigma^2$. מה הבעייתיות בתשובה?

## תשובות סופיות:

1) $\hat{a}=2\overline{X}-20$.

2) $\overline{X}=\hat{\mu}$ , $\hat{\sigma}^2=\frac{\sum X_i^2}{n}-\overline{X}^2$.

3) א. $\hat{n}=2X$. ב. $\hat{n}=2\overline{X}_m$. ג. $\hat{n}=10\frac{2}{3}$.

4) $\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}$.

5) א. $\frac{\theta}{\theta+1}$. ב. $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$.

6) א. $\hat{\sigma}^2=\frac{\sum X_i^2}{n}-100$. ב. -55.75.

# אומד עקיב:

## רקע:

יהי $\hat{\theta}_n$ אומד לפרמטר $\theta$, המתבסס על $n$ תצפיות.

אומד זה יקרא אומד עקיב, אם יתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

אם $\hat{\theta}_n$ אומד חסר הטיה לפרמטר $\theta$ ומתקיים ש: $\lim_{n \to \infty} V\left(\hat{\theta}_n\right) = 0$,

אזי $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל- $\theta$.

## דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסבר מדוע $\overline{X}$ אומד עקיב ל- $\mu$.

אם $\hat{\theta}_n$ אומד נראות מקסימלית לפרמטר $\theta$, מתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

כלומר, $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל- $\theta$.

## דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסבר מדוע בהתפלגות גיאומטרית $\frac{1}{\overline{X}}$, אומד עקיב לפרמטר $P$.

## שאלות:

**1)** נתון כי: $X_i \sim U(0,\theta)$ , כאשר: $i=1,2...,n$ .

$2\bar{X}$ מוצע להיות האומד ל- $\theta$.

א. הראה שאומד זה הוא חסר הטיה.

ב. הסבר מדוע האומד הינו עקיב.

**2)** נתון ש- $X \sim B(n,p)$ . כמו כן, נתון ש: $\hat{p}=\frac{X}{n}$ הינו אומד ל- $p$ .

הוכח שאומד זה הינו אומד עקיב ל- $p$ .

**3)** אורך חיי נורה מתפלג מעריכית עם קצב $\lambda$ לשנה.

נגדיר את: $W_1,W_2,...,W_n$ כסדרת זמנים (בשנים) של $n$ נורות בלתי תלויות.

א. מהו אומד הנראות המקסימלי עבור $\lambda$ ? האם האומד עקיב?

ב. מצא אומד עקיב לסיכוי שנורה כלשהי תישרף תוך פחות משנתיים.

**4)** נפח החלב בקרטון חלב מתפלג נורמלית עם תוחלת $\mu$ ושונות $\sigma^2$ .

מצא אומד עקיב לפרמטר $\sigma^2$ , המתבסס על $n$ תצפיות בלתי תלויות.

## תשובות סופיות:

**1)** א. שאלת הוכחה. ב. ראה סרטון.

**2)** שאלת הוכחה.

**3)** א. $\frac{1}{\bar{W}}$. ב. $1-e^{-\frac{2}{\bar{W}}}$.

**4)** $\frac{\sum_i (X_i-\bar{X})^2}{n}$ .

# אומד נראות מקסימלית:

## רקע:

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.

נניח ש- $X$ משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות $P(x,\theta)$,
כאשר $\theta$ הפרמטר הבלתי ידוע.

יהיו: $X_1, X_2, \dots, X_n$ תוצאות מדגם מקרי בגודל $n$ הנלקח מאוכלוסייה זו.

נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).

אם אנו יודעים את תוצאות המדגם, ולא את הפרמטר, קוראים לפונקציית הנראות
שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגדיר את פונקציית הנראות:

$$L(\theta) = P(x_1,\theta)\cdot P(x_2,\theta)\cdot\ldots\cdot P(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i,\theta).$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של $\theta$),
כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכולי. כלומר, המשמעות של פונקציית
הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש $\theta$.

אם מדובר במשתנה רציף, נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות:

$$L(\theta) = f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta).$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא $p$ (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל
עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו.
הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי.
השחקן חוזר על התהליך שוב, והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.
מצאו את פונקציית הנראות של $p$.

אומד נראות מקסימלית עבור $\theta$ הוא האומד $\hat{\theta}$, שממקסם את פונקציית הנראות $L(\theta)$.
כלומר, אנו מחפשים את האומד שיגרום לכך שהמדגם המקרי שקיבלנו יהיה כמה שיותר סביר.

**שלבים למציאת אומד נראות מקסימלית:**

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המדגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המדגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנחקר).
- מוצאים מקסימום לפונקציית הנראות (לעיתים כדאי להוסיף $ln$ כדי להקל על המלאכה).

**המשך דוגמה:**

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור $p$.

**משפט:** אם $\hat{\theta}$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $\theta$, אזי $g\left(\hat{\theta}\right)$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $g\left(\theta\right)$, בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינווריאנטיות).

**המשך דוגמה:**

מצאו אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקן הכדורסל לקלוע לסל פעמיים ברצף.

## שאלות:

**1)** הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא $p$ (לא ידוע).
השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה.
נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.
א. חשבו את פונקציית הנראות של $p$, וציירו גרף שלה.
ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור $p$.
ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $p$, אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים, עד אשר ניצח.

**2)** מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של $\lambda$ לקוחות ביום.
א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\lambda$, על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.
ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\lambda$, על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב- $n$ ימים מסוימים.

**3)** הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר $\lambda$.
דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם.
התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 7,5 ו-3.
א. פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך $n$ תצפיות כלשהן.
ב. מהו האומדן לפרמטר?

**4)** משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער, ביום אחד, מתפלג אחיד: $U(0,q)$.
כדי לאמוד את $\theta$, נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי-בית באותו יום.
א. אלעד הכין ביום מסוים שעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של $\theta$ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.
ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $\theta$ על סמך התצפית.
ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו $1,3,1.5$.
מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $\theta$ על סמך המדגם הזה.
ד. מצאו באופן כללי אומד נראות מקסימלית ל- $\theta$, על סמך מדגם של $n$ בני נוער – $X_1,\ldots,X_n$.

**5)** הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות $\sigma^2$ לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מדגם $X_1,\dots,X_n$ מתצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 165, 174, 174.
מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

**6)** פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר $p$ בהתפלגות הבינומית,
על סמך מדגם בגודל $n$, בו $X$ הוא מספר ההצלחות במדגם.

**7)** $X$ הוא משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}2\theta xe^{-\theta x^2} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\theta$ על סמך $n$ תצפיות בלתי תלויות: $X_1,\dots,X_n$.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\theta^2$.

**8)** בכד א' 10 כדורים שחורים ו-10 לבנים ובכד ב' 5 כדורים שחורים ו-15 לבנים.
דוגמים באקראי כדור, בלי לדעת מאיזה כד.

א. מצא אומד נראות מקסימלית לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

**9)** הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה.
נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

**10)** מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מקרי $X$, בעל התפלגות התלויה בפרמטר $\theta$, באופן הבא:

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $4\theta^2$ | $4\theta-8\theta^2$ | $1-4\theta+4\theta^2$ |

בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 0, 0, 1, 0 לקוחות ממתינים בתור.

א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר $\theta$, על-סמך המדגם הנתון.

ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

**11)** אדם מחזיק בידו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן – שהסיכוי לקבל בו תוצאה של עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את ההוגן או את זה שאינו הוגן.

א. מצא אומד בשיטת הנראות המקסימלית לסוג המטבע שהוטל.

ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

**12)** מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה.
דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש-4 מהם מובטלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה.

ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

**13)** במשחק מחשב שלוש רמות משחק:
ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.
ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.
ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.
יוסי בחר ברמה מסוימת, אך אינו יודע באיזו רמה הוא בחר.
הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.

א. הציעו א.נ.מ. לרמה של המשחק שיוסי שיחק, על סמך מספר הפעמים שסיים את המשחק.

ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?

ג. מהו א.נ.מ. לסיכוי, שמתוך שני משחקים הוא יצליח בדיוק משחק אחד?

**14)** $X_1, X_2, ..., X_n$ מתפלגים אחיד בקטע: $[-\theta, \theta]$.
מצא אומד נראות מקסימלית לפרמטר $\theta$.

**15)** $X_1, X_2, ..., X_n$ מתפלגים בדיד לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

$$K = 1,2 \qquad P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \cdot P^k \cdot (1-P)^{2-k}}{1-(1-P)^2}.$$

הוכח שא.נ.מ ל- $P$, הינו: $2 - \frac{2}{\overline{X}}$.

**16)** במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ת זו בזו, והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקה לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא $P$. כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו.
בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר חודש נמצא ש-30 מהם עדיין פועלים.

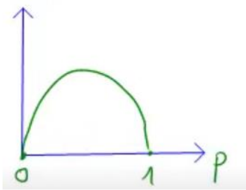
א. מצא אומדן נראות מקסימלית עבור $P$.
ב. רשמו את האומד שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של $n$ מכשירים שמתוכם נמצאו $Y$ מכשירים שעדיין פועלים לאחר חודש אחד.
ג. בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי,
עם פי צפיפות: $f(t) = \theta e^{-\theta t}$ עבור $t > 0$.
מצא א.נ.מ. עבור $\theta$, המבוסס על $Y$.
מהו האומדן המתאים מן המדגם הנתון?

**17)** חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אות אחת לשתי דקות. אם לאחר 20 דקות (10 אותות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדיין תפוס, החיוג האוטומטי נפסק.

א. רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה $X$ – מספר הפעמים שהחייגן האוטומטי מחייג למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של אות חיוג הוא $P$.
ב. מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו התוצאות הבאות: בשני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם הצליח המטלפן להשיג את המספר המבוקש, מספר החיוגים האוטומטיים עד לקבל צליל "פנוי" היו: 1, 6, 2, 7, 3, 8, 2, 2, 1, 5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור $P$, על סמך התוצאות שהתקבלו.

## תשובות סופיות:

1) א. $L(p)=(1-p)\cdot p$. להלן גרף:




ב. 0.5. ג. $\frac{2}{9}$.

2) א. $\overline{X}$. ב. $\overline{X}$.

3) א. $\frac{1}{\overline{X}}$. ב. $\frac{2}{9}$.

4) א. 1. ב. 1. ג. 3. ד. $\hat{\theta}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$.

5) א. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-170)^2}{n}$. ב. 40.2.

6) $\frac{x}{n}$.

7) א. $\frac{n}{\sum X_i^2}$. ב. $\left(\frac{n}{\sum X_i^2}\right)^2$.

8) א. ראה סרטון. ב. כד א'.

9) א. 32. ב. 0.3916.

10) א. 0.45. ב. 0.81.

11) א.ראה סרטון. ב. הוגן.

12) א. 0.08. ב.0.92. ג. 11.5.

13) א. $\hat{\theta}=\begin{cases}3 & X=0,1\\ 1 & X=2\end{cases}$. ב. 1. ג. $\hat{p}=\begin{cases}2\cdot 0.4\cdot 0.6 & X=0,1\\ 2\cdot 0.9\cdot 0.1 & X=2\end{cases}$.

14) $\max|X_i|$.

15) שאלת הוכחה.

16) א. 0.6124 ב. $\hat{p}=\sqrt{\frac{y}{n}}$ ג.0.49.

17) א. $P(x)=\begin{cases}(1-p)^{x-1}p & 1\le x\le 9\\ (1-p)^9 & x=10\end{cases}$. ב. 0.1818.

## נספח:

### התפלגויות רציפות

| ההתפלגות | פונקציית הצפיפות | פונקציית ההתפלגות המצטברת | תוחלת | שונות | הערות | אנ"מ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X \sim U(a,b)$ | $f(x)=\frac{1}{b-a}$ <br> $a \le x \le b$ | $\frac{t-a}{b-a}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | | $b=\max(X_i)$ <br> $a=\min(X_i)$ |
| $X \sim \exp(\lambda)$ | $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ | $1-e^{-\lambda t}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. $\lambda$ - הוא ממוצע האירועים ביחידת זמן. | $\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}$ |
| $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ | $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\Phi(t)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ | $\hat{\mu}=\bar{X}$ <br> $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ |

### התפלגויות בדידות

| ההתפלגות | פונקציית ההסתברות $P(X=k)$ | תוחלת | שונות | הערות | אנ"מ |
|---|---|---|---|---|---|
| בינומית <br> $B(n,p)$ <br> $0 \le p \le 1$ | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ <br> $k=0,1,\dots,n$ | $np$ | $np(1-p)$ | (1) | $\hat{P}=\frac{Y}{n}$ |
| גיאומטרית <br> $G(p)$ <br> $0 < p \le 1$ | $(1-p)^{k-1}p$ <br> $k=1,2,\dots,\infty$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | (2) | $\hat{P}=\frac{1}{\bar{X}}$ |
| אחידה <br> $U(a,b)$ | $\frac{1}{b-a+1}$ <br> $K=a,\dots,b$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$ | (3) | $b=\max(X_i)$ <br> $a=\min(X_i)$ |
| פואסונית <br> $P(\lambda)$ <br> $\lambda>0$ | $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ <br> $k=0,1,\dots,\infty$ | $\lambda$ | $\lambda$ | (4) | $\hat{\lambda}=\bar{X}$ |

(1) מספר ההצלחות ב- $n$ ניסויי ברנולי ב"ת. $p$ - ההסתברות להצלחה.

(2) מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת, $p$ - ההסתברות להצלחה.

(3) בחירה אקראית של מספר בין $a$ ו- $b$.

(4) מספר אירועים ביחידת זמן, $\lambda$ - קצב האירועים.